3 Gebrochen-rationale Funktionen

In diesem Kapitel werden wir die Kurvendiskussion von gebrochen-rationalen Funktionen besprechen. Prinzipiell sind die zu behandelnden Aspekte die gleichen wie bei der schon behandelten Kurvendiskussion von Polynomen. Allerdings gibt es im Vergleich einige wichtige Änderungen und Ergänzungen, die dem speziellen Charakter der gebrochen-rationalen Funktionen geschuldet sind.

3.1 Ein Bruch als Funktion?

Gebrochen-rationale Funktionen unterscheiden sich von den bisher behandelten ganz-rationalen Funktionen dadurch, dass sie einen Quotienten beinhalten, in dessen Nenner sich ebenfalls variable Terme befinden. Anders als bei den Polynomen kann (und wird) es also passieren, dass wir „durch x teilen“anstatt wie bisher nur Vielfache von Potenzen von x zu addieren.

Definition 3.1.1 (Gebrochen-rationale Funktion).
Eine Funktion, die durch den Quotienten zweier Polynome gebildet wird, bezeichnen wir als gebrochen-rationale Funktion. Wir sprechen analog zu den Begriffen der Bruchrechnung auch von Zählerfunktion und Nennerfunktion und schrieben allgemein:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0} \tag{3.1.1}$$

Bemerkung 3.1.2.
Um eine allgemeine Darstellung angeben zu können, benutzen wir für den Grad der Zählerfunktion (Zählergrad) den Buchstaben n und für den Grad der Nennerfunktion (Nennergrad) den Buchstaben m. Diese unterschiedliche Benennung schließt allerdings, wie wir sehen werden, nicht aus, dass beide Teilfunktionen den gleichen Grad besitzen.

3.2 Definitionsbereich und Nullstellen

Bei gebrochen-rationalen Funktionen hängen Definitionsbereich und Nullstellen eng zusammen. Das liegt daran, dass solche Stellen, die sowohl im Zähler als auch im Nenner den Wert 0 besitzen sogenannte hebbare Lücken darstellen, die sich in der Linearfaktorzerlegung der Funktion wegkürzen lassen. Allgemein gelten folgende Merkregeln:

Definition 3.2.1 (Definitionslücken)**.**
Die Nullstellen der Nennerfunktion führen zu einer Division durch 0. Sie werden daher von vornherein von der Funktionsuntersuchung ausgeschlossen und beschränken damit den Definitionsbereich der Funktion. Wir nennen sie auch Definitionslücken oder Polstellen. (siehe Abbildung 3.1)

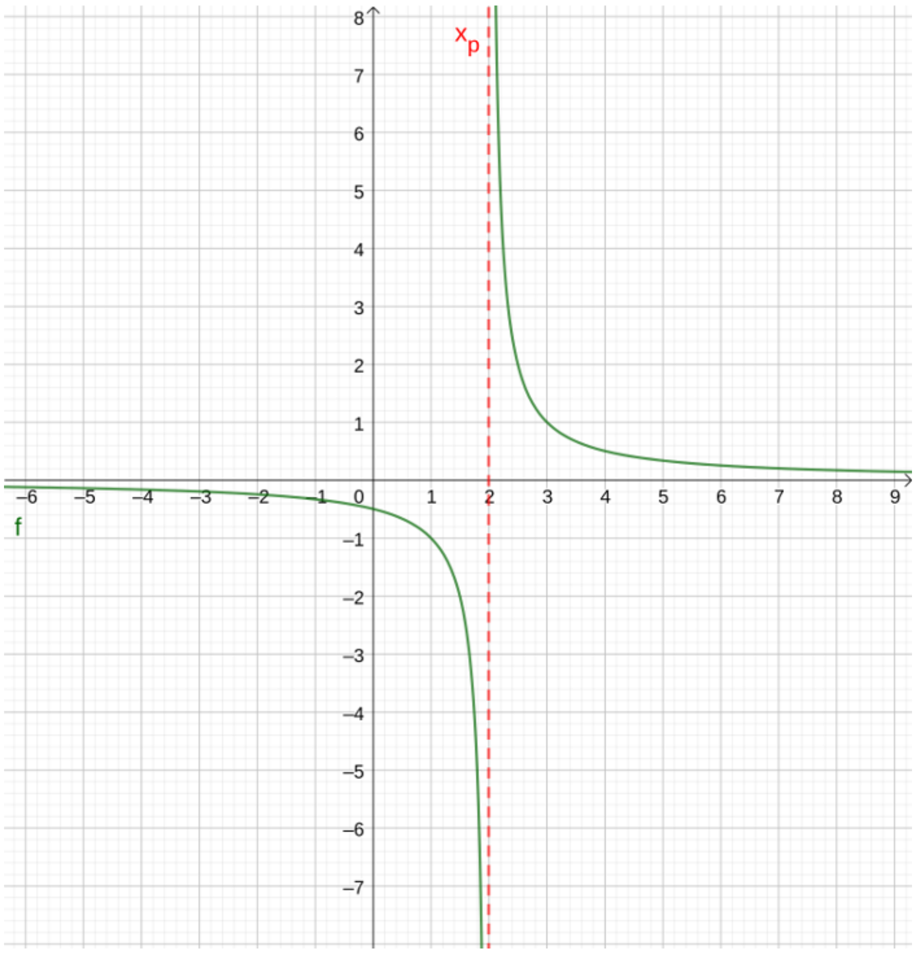

Abbildung 3.1: Funktionsgraph mit Polstelle bei $x_p = 2$

Satz 3.2.2.

Die Nullstellen der Zählerfunktion sind, da jeder Bruch mit Zähler 0 den Wert 0 besitzt, identisch mit den Nullstellen der gesamten Funktion (und umgekehrt). Zum Auffinden der Nullstellen der Funktion reicht es also die Zählerfunktion null zu setzen und mit einem aus Kapitel 2.5 bekannten Verfahren zu berechnen.

Satz 3.2.3 (Hebbare Lücken)**.**

Hebbare Lücken liegen vor, wenn eine Stelle sowohl Zählernullstelle als auch Nennernullstelle ist. Solche Stellen kürzen sich in der Linearfaktordarstellung der Funktion weg. Die gekürzte Funktion kann als Ersatzfunktion für die restliche Kurvendiskussion benutzt werden, da Kürzen den Wert eines Bruches nicht verändert. Trotzdem markieren wir (wie Abbildung 3.2 zeigt) im Schaubild der Funktion eine gefundene hebbare Lücke mit einem Punkt auf dem Graphen.

Beispiel 3.2.4 ($f(x) = \frac{x^2-7x}{x^2+2x}$)**.**

Die Funktion besitzt die Zählernullstellen 0 *und* 7 *und die Nennernullstellen 0 und -2. Ihre Linearfaktordarstellung ist*

$$f(x) = \frac{x \cdot (x-7)}{x \cdot (x+2)} = \frac{x-7}{x+2}$$

Der Linearfaktor der Nullstelle $x = 0$ *tritt sowohl im Zähler als auch im Nenner auf und kann deshalb weggekürzt werden. Die Ersatzfunktion ist* $\frac{x-7}{x+2}$*. Mit ihr führen wir die restliche Kurvendiskussion durch. Sie besitzt nun noch eine Nullstelle und eine Polstelle:*

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\} \text{ „Alle reellen Zahlen ohne -2“}$$

$$\text{Nullstelle bei } x_1 = 7$$

Der Funktionswert für die hebbare Lücke kann nun, da er keine Division durch 0 mehr bewirkt, berechnet werden.

$$f(0) = \frac{0-7}{0+2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

Wir markieren die hebbare Lücke durch einen Punkt auf dem Funktionsgraph bei $(0| -3,5)$*.*

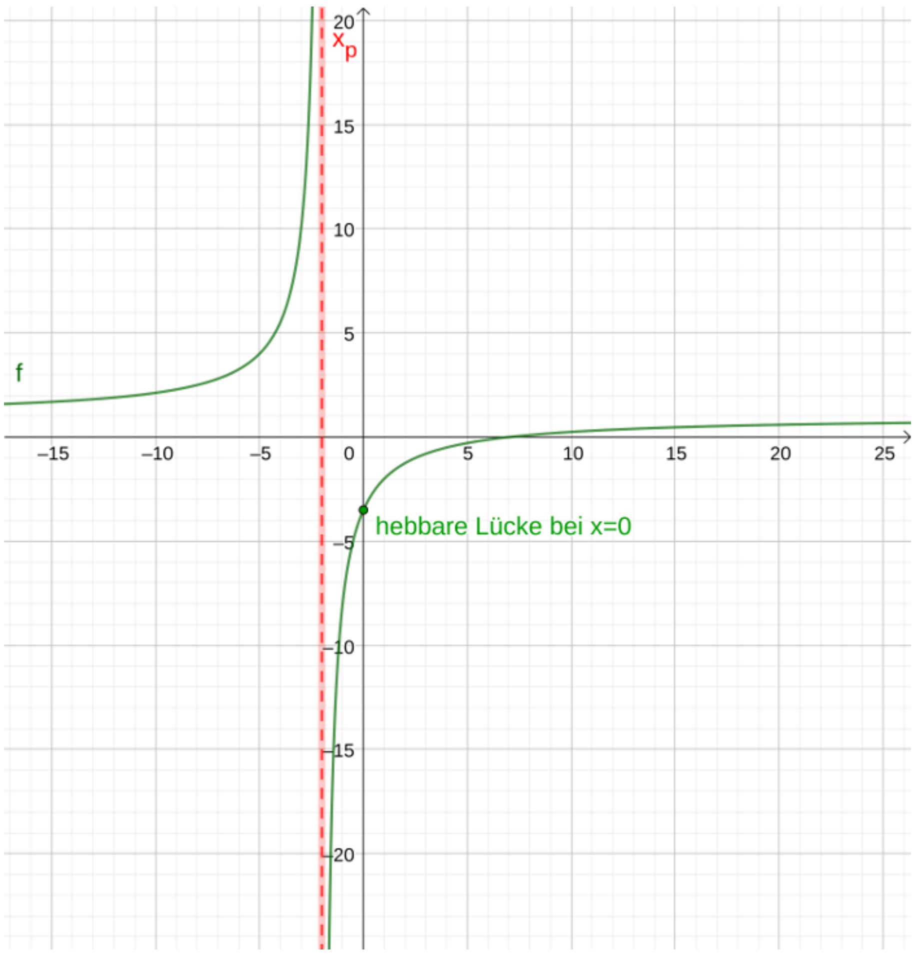

Abbildung 3.2: Funktionsgraph mit Polstelle und hebbarer Lücke

3.3 Symmetrieeigenschaften

Bei den Symmetrieeigenschaften können wir auf das aus der normalen Kurvendiskussion bekannt Kriterium aus Kapitel 2.2 zurückgreifen, wobei wir es um eine Komponente erweitern müssen, da wir bei gebrochen-rationalen Funktionen theoretisch mit zwei Funktionen arbeiten. Bei einer gebrochen-rationalen Funktion verhält es sich so, dass Symmetrie nur vorliegt, wenn beide Teilfunktionen jeweils schon symmetrisch sind. Dabei gilt:

Satz 3.3.1 (Symmetriekriterium für gebrochen-rationale Funktionen)**.**

Eine gebrochen-rationalen Funktion ist $\begin{cases} achsensymmetrisch \\ punktsymmetrisch \end{cases}$ *wenn die beiden Teilfunk-*

tionen $\begin{cases} \textit{den selben} \\ \textit{einen unterschiedlichen} \end{cases}$ *Symmetrietyp haben. Ist eine der beiden Teilfunktionen nicht symmetrisch, so ist die gesamte Funktion nicht symmetrisch.*

Beispiel 3.3.2.

- *Die Funktion* $f(x) = \frac{x-7}{x+2}$ *ist nicht symmetrisch, da sowohl Zählerfunktion als auch Nennerfunktion keine Symmetrieeigenschaft aufweisen.*
- *Die Funktion* $f(x) = \frac{x^2-2}{x^4-x^2}$ *ist achsensymmetrisch, da beide Teilfunktionen achsensymmetrisch sind.*
- *Die Funktion* $f(x) = \frac{x^3-x}{x^7-3x^5}$ *ist achsensymmetrisch, da beide Teilfunktionen punktsymmetrisch sind.*
- *Die Funktion* $f(x) = \frac{x^4-x^2}{x^3-x}$ *ist punktsymmetrisch, da die Zählerfunktion achsensymmetrisch und die Nennerfunktion punktsymmetrisch ist.*

3.4 Verhalten im Unendlichen

Das Verhalten im Unendlichen hängt bei gebrochen-rationalen Funktionen sowohl vom Zählergrad n als auch vom Nennergrad m ab. Wir unterscheiden die vier folgenden Fälle:

1. Fall: $n < m$

   Der Graph der Funktion nähert sich im Unendlichen der x-Achse an.

   $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

2. Fall: $n = m$

   Der Graph nähert sich im Unendlichen der waagerechten Geraden $y = \frac{a_n}{b_m}$ an. Diese Gerade nennen wir waagerechte Asymptote.

   $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$$

3. Fall: $n = m + 1$

   Der Graph nähert sich der schiefen Asymptote $a(x)$ an. Diese finden wir durch Polynomdivision der Zählerfunktion durch die Nennerfunktion. Sie wird durch den ganzrationalen Teil des zerlegten Quotienten gebildet.

4. Fall: $n > m + 1$

   Auch hier führen wir eine Polynomdivision der Zählerfunktion durch die Nennerfunktion durch. Das Verhalten der Funktion f ist nun identisch mit dem des ganz-rationalen Teilergebnisses $a(x)$. f verhält sich also wie ein Polynom mit dieser Gleichung.

Beispiel 3.4.1 (1. Fall)**.**

$$f(x) = \frac{1}{2x^2},\ n = 0,\ m = 2,\ n < m,\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

(vergleiche Abbildung 3.3)

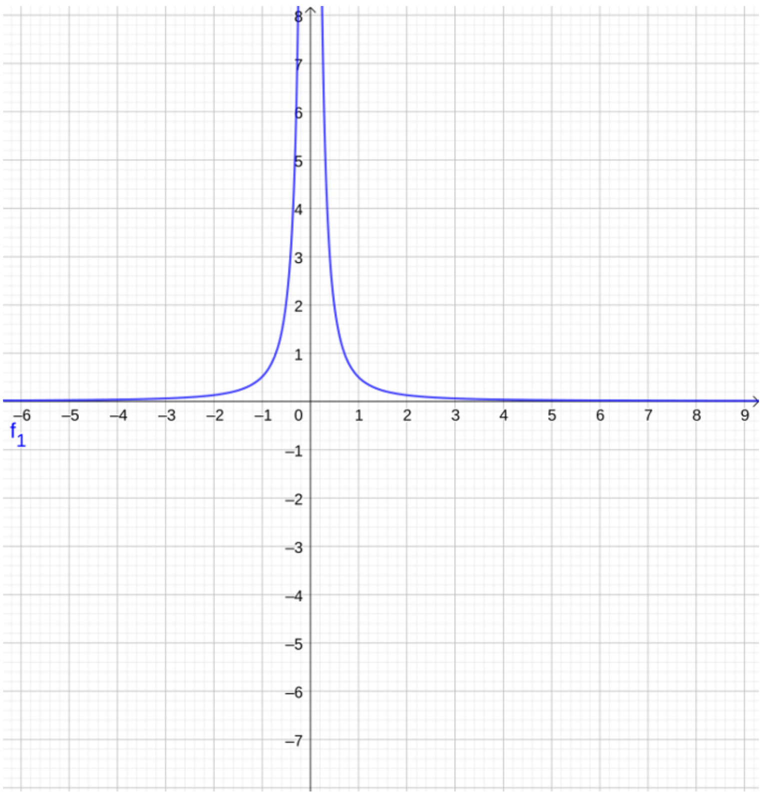

Abbildung 3.3: Verhalten im Unendlichen, 1. Fall

Beispiel 3.4.2 (2. Fall)**.**

$$f(x) = \frac{3x}{2x-4},\ n = 1,\ m = 1,\ n = m,\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{3}{2}$$

(vergleiche Abbildung 3.4)

Abbildung 3.4: Verhalten im Unendlichen, 2. Fall

Beispiel 3.4.3 (3. Fall)**.**

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{2x - 1},\ n = 2,\ m = 1,\ n = m + 1$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\left(\quad 2x^2 \quad + x\right) : \left(2x - 1\right) = x + 1 + \dfrac{1}{2x - 1} \\
\underline{-\,2x^2 \quad + x} \\
\qquad\qquad 2x \\
\qquad\quad \underline{-\,2x + 1} \\
\qquad\qquad\quad 1
\end{array}$$

$$\Rightarrow a(x) = x + 1,$$

(vergleiche Abbildung 3.5)

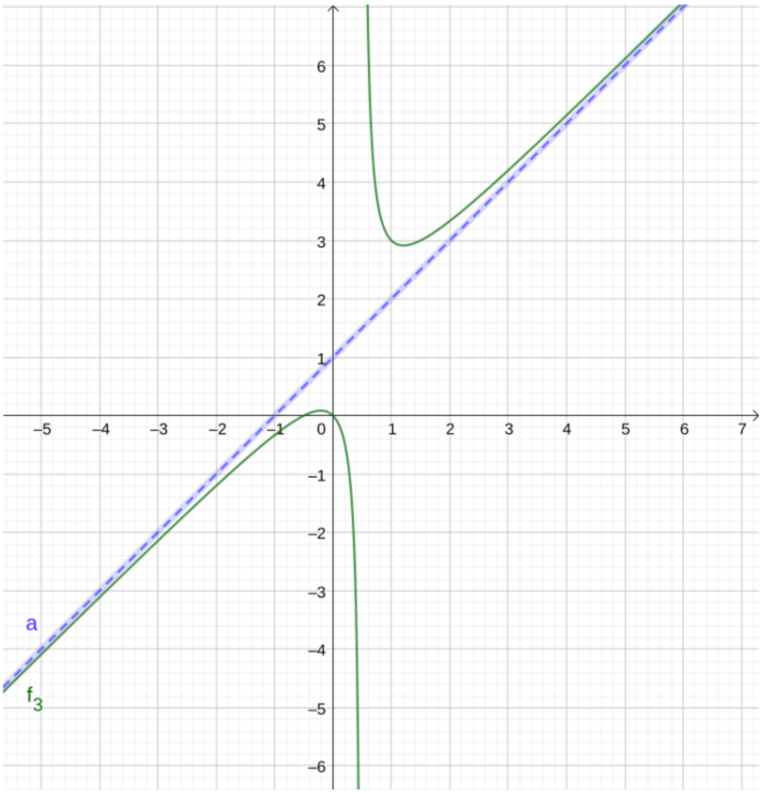

Abbildung 3.5: Verhalten im Unendlichen, 3. Fall

Beispiel 3.4.4 (4. Fall)**.**

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x},\ n = 3,\ m = 1,\ n > m + 1$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 + x + 1 \right) : x = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x} \\
\underline{-\,x^3} \\
\qquad\quad x \\
\qquad\underline{-\,x} \\
\qquad\qquad 1
\end{array}$$

f verhält sich wie das Polynom mit der Gleichung

$$a(x) = x^2 + 1$$

also gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

(vergleiche Abbildung 3.6)

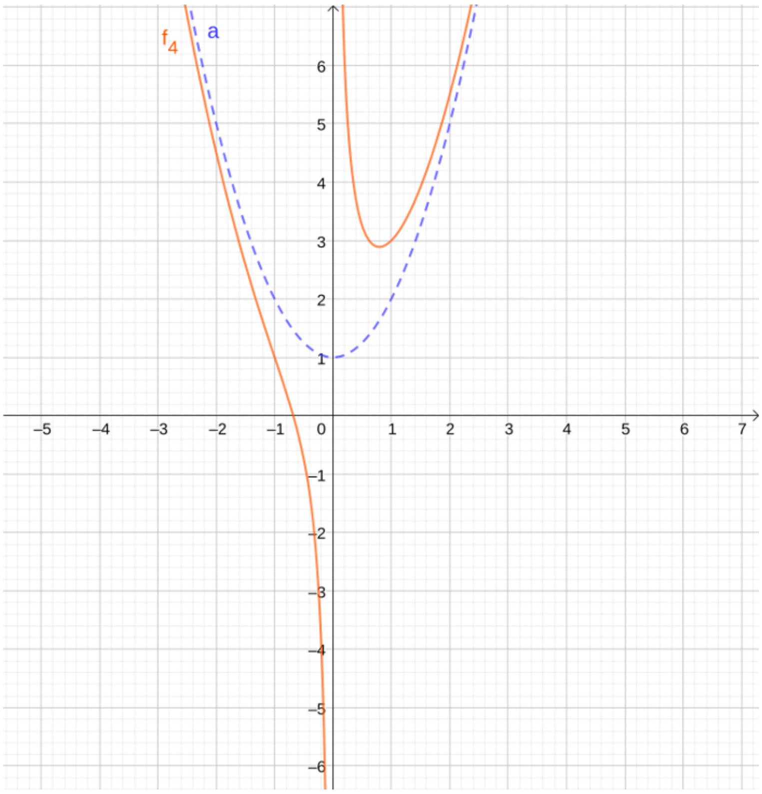

Abbildung 3.6: Verhalten im Unendlichen, 4. Fall

3.5 Der y-Achsenabschnitt

Für den y-Achsenabschnitt gilt das selbe wie für alle Funktionen:

Satz 3.5.1.

Der y-Achsenanschnitt ist der Funktionswert an der Stelle $x = 0$, also wird er berechnet durch $f(0)$.

Bemerkung 3.5.2.

Achtung: Es kann sein, dass eine gebrochen-rationale Funktion keinen y-Achsenabschnitt besitzt, nämlich dann, wenn $x = 0$ eine Polstelle ist.